محمد هاشمی رستمی

مکان هندسی (۲)

یک قضیه و عکس آن

اشاره

همان‌طوری که می‌دانید، با عوض کردن جای فرض و حکم یک قضیه، عکس آن قضیه به‌دست می‌آید. چون در قضایای مربوط به مکان هندسی یک مطلب و عکس آن را باید ثابت کنیم، اشاره‌ای به این مطلب می‌کنیم.

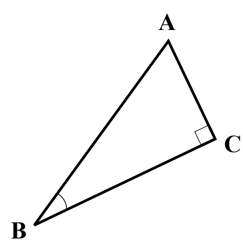
کلیدواژه‌ها مثلث، نیم‌ساز، زاویه قائمه، مکان هندسی

به مثال زیر توجه کنید:

◆ **قضیه:** در مثلث ABC اگر $AB > AC$ باشد، ثابت کنید: $C > B$ است. در این قضیه داریم:

◆ **فرض:** $AB > AC$

◆ **حکم:** $C > B$



شکل ۱

اگـــر جای فرض و حکم این قضیه را عوض کنیم، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

◆ **قضیه:** در مثلث ABC، اگر $\hat{C} > \hat{B}$ باشد، ثابت کنید: $AB > AC$ است. در این قضیه داریم:

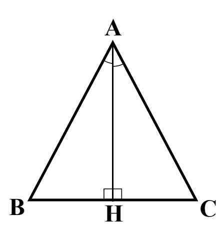
◆ **فرض:** $\hat{C} > \hat{B}$

◆ **حکم:** $AB > AC$

این دو قضیه عکس یکدیگرند و هر دو نیز درســت‌اند. این دو قضیه را ثابت کنید.

نکته. حال اگر فرض و یا حکم قضیه‌ای یا هردوی آن‌ها چند قســمت داشته باشند، قضیه چند قضیهٔ عکس خواهد داشت. به مثال زیر توجه کنید:

◆ **قضیه:** در مثلث متساوی‌الســاقین ABC، ارتفاع رأس A را رسم می‌کنیم (شکل ۲). ثابت کنید که این ارتفاع نیم‌ساز زاویــهٔ رأس A و همچنین میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC اســت. در ایــن قضیه داریم:



شکل ۲

◆ **فرض:** $AB = AC$ و $AH \perp BC$

◆ **حکم:** $HB = HC$ و $B\hat{A}H = C\hat{A}H$

به‌طوری که دیده می‌شــود، این قضیــهٔ ۲ فرض و ۲ حکم دارد. با عوض کردن جای هر قســمت از فــرض و حکم یک عکس قضیه به‌دست می‌آید. مثلاً اگر داشته باشیم:

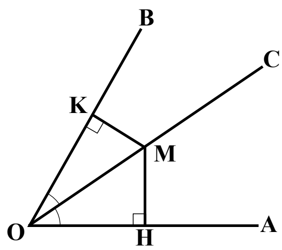
◆**فرض:** $HB = HC$ و $AH \perp BC$

◆**حکم:** $B\hat{A}H = C\hat{A}H$ و $AC=AB$

این قضیه درست است و صورت آن را چنین بیان می‌کنیم:
اگر در مثلث ABC ارتفاع رأس A میانه نظیر ضلع BC نیز باشد، اولاً آن مثلث متساوی‌الســاقین است و ثانیاً ارتفاع AH نیم‌ساز زاویهٔ BAC نیز هست.

توجه. *بقیهٔ حالت‌ها را خودتان بنویسید و اثبات کنید.*

مثالی دیگر از یک قضیه و عکس آن که با آن آشــنا هســتید، مربوط به ویژگی نیم‌ســاز یک زاویه است. می‌دانیم که هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به آن فاصله است.



شکل ۳

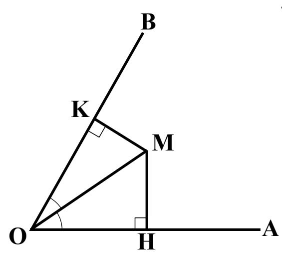
یعنی اگر OC نیم‌ســاز زاویهٔ AOB و M نقطــه‌ای دلخــواه از آن و MH و MK فاصله‌هــای نقطــهٔ M از دو ضلــع این زاویه باشــند، آن‌گاه داریم: MH=MK (شکل ۳). به صورت دیگر داریم:

◆ **فرض:** (نیم‌ســاز زاویهٔ AOB) $M \in OC$

◆**حکم:** MH=MK

◆**اثبات**: دو مثلث قائم‌الزاویه MOH و MOK به دلیل تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده. ($M\hat{O}K = M\hat{O}H \quad OM = OM, \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ$)

بنابراین: MH=MK یعنی نقطهٔ M واقع بر نیم‌ساز زاویهٔ AOB از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است.



شکل ۴

◆**قضیه:** هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیم‌ســاز آن زاویه قرار دارد. یعنی اگــر MH و MK فاصله‌هــا نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ AOB باشــد و داشته باشیم: MH=MK، آن‌گاه M روی نیم‌ســاز ایــن زاویه قــرار دارد؛ یعنی: $M\hat{O}H = M\hat{O}K$

به بیان دیگر، در این قضیه داریم:

◆**فرض:** $MH \xrightarrow{b} OA, MK \xrightarrow{b} OB, MH = MK$

◆**حکم:** $M\hat{O}H = M\hat{O}K$ یا M روی نیمساز زاویهٔ AOB است.

◆**اثبات:** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MOH و MOK ($\hat{K} = \hat{H} = ۹۰^\circ$)، به دلیل تســاوی وتــر و یک ضلع (OK=OH و OM=OM) هم‌نهشت‌اند. بنابراین $M\hat{O}H = M\hat{O}K$.. یعنی OM نیم‌ســاز زاویهٔ AOB است. یا به عبارت دیگر، نقطهٔ M که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، روی نیم‌ساز این زاویه قرار دارد.
بنابراین می‌توان گفت:

◆**قضیه:** نیم‌ساز هر زاویه مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ آن زاویه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
واضح است که برای اثبات این قضیه باید دو قضیهٔ بالا را که یکی عکس دیگری است، ثابت کنیم که اثبات آن‌ها را دیدید.

نکتهٔ مهم. *اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا عکس هر قضیه‌ای درست است؟ شما چه فکر می‌کنید؟*

پاســخ منفی است. یعنی عکس هر قضیه‌ای ممکن است درست نباشد. به مثال زیر توجه کنید:

◆**قضیه:** هر دو زاویهٔ قائمه با هم مساوی‌اند؛ یعنی:

◆**فرض:** دو زاویهٔ قائمه‌اند

◆**حکم:** دو زاویهٔ مساوی‌اند

روشن اســت که این قضیه درست اســت. اما عکس این قضیه چنین است که: هر دو زاویهٔ مساوی، قائمه‌اند؛ یعنی:

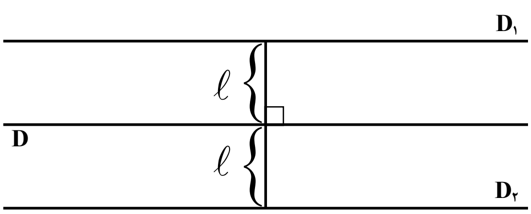
◆**فرض:** دو زاویه مساوی‌اند

◆**حکم:** دو زاویه قائمه‌اند

روشن اســت که این قضیه درست نیست. زیرا دو زاویهٔ مساوی، الزاماً قائم نیستند. مواردی دیگر را هم می‌توان بیان کرد.
اکنون که با تعریف مکان هندســی و ویژگی‌هایی از آن آشــنا شــدید، به معرفی چند مکان هندسی پرکاربرد می‌پردازیم و سپس چگونگی حدس زدن شــکل یک مکان هندســی را بیان می‌کنیم و بعد به کاربردهایی از مکان هندسی در بخش‌های متفاوت هندسه، از جمله رسم شکل‌های هندسی می‌پردازیم.

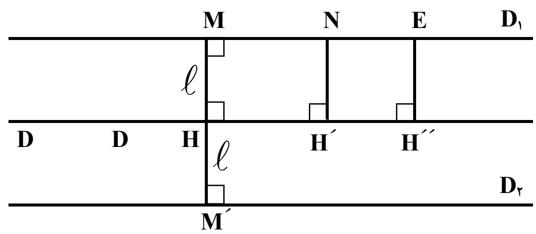
یک مکان هندسی دیگر

◆**قضیه:** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط راست D واقع در آن صفحه، به فاصله‌ها ثابت ℓ باشد، دو خط راست D_1 و D_2 است.



شکل ۵

◆**اثبات به روش هندسی** ....



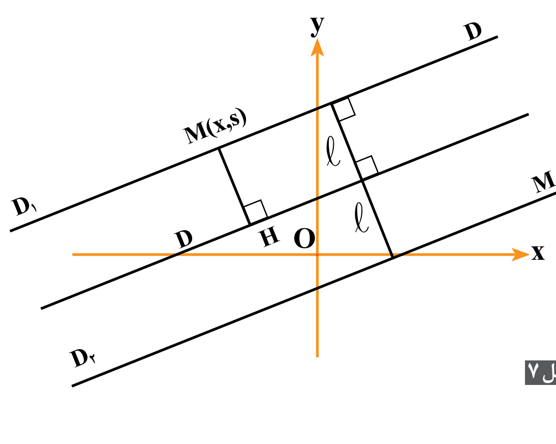
شکل ۶

خط راست D را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم و دو خط راست D_1 و D_2 را در دو طرف آن و به فاصلهٔ ℓ را از آن رسم می‌کنیم. برای این کار از نقطهٔ H واقع بر خط D، خط راستی عمود بر این خط اخراج و روی آن در دو طرف نقطهٔ H، پاره‌خط‌های HM و HM' را به طول ℓ جدا می‌کنیم. سپس از نقطه‌های M و M' خط‌های D_1 و D_2 را به موازات خط D می‌کشیم. این دو خط مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای هستند که از خط D به فاصلهٔ ℓ واقع است. زیرا:

الف) هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط D_1 یا D_2 قرار داشته باشد، از خط D به فاصلهٔ ℓ واقع است. چرا که اگر پای عمود از نقطهٔ N بر خط D را H' بنامیم چهارضلعی MHH'N که اضلاعش دو به دو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل است. پس داریم: $NH'=MH=\ell$.

ب) هر نقطه‌ای مانند E از صفحهٔ P که از خط D به فاصلهٔ ℓ قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 واقع است. زیرا با توجه به اینکه داریم: $MH \parallel EH''$ ، $MH = EH'' = \ell$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ ، چهارضلعی MHHE" مستطیل است و در نتیجه داریم: $HH'' \parallel ME$ یا $ME \parallel D$. پس نقطهٔ E روی خط D_1 قرار دارد (از نقطهٔ M تنها یک خط راست به موازات خط راست D می‌توان رسم کرد).

◆**اثبات به روش تحلیلی** ....



شکل ۷

خط D به معادلهٔ $D: ax+by+c=0$ را در دستگاه مختصات قائم xoy در نظر بگیریم. اگر (x و y) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MH = d = \ell \Rightarrow \ell = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow$$
$$|ax+by+c| = \ell\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$$
$$D_1 : ax+by+c+\ell\sqrt{a^2+b^2} = 0,$$
$$D_2 : ax+by+c-\ell\sqrt{a^2+b^2} = 0$$

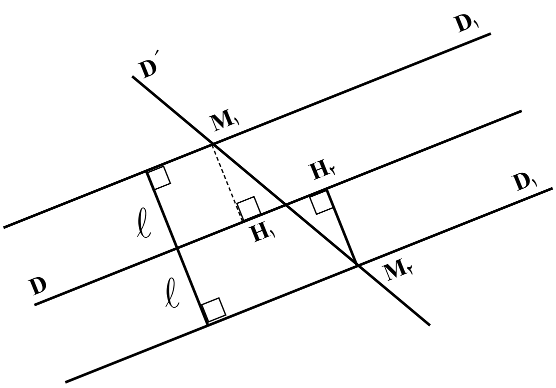
به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط D_1 و D_2 خط‌های راستی هستند که با خط D موازی‌اند، زیرا:

$$M_{D_1} = M_{D_2} = M_D = -\frac{a}{b}$$

به عکس مشخص است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ یکی از دو خط D_1 و D_2 صدق کند، از خط $D: ax+by+c=0$ به فاصله ℓ قرار دارد. بنابراین:

مکان هندسی نقطه‌ای که از خط راست ثابت D به فاصلهٔ معین ℓ واقع است. دو خط راست موازی این خط است که در طرفین آن واقع‌اند.

مثال ۱. دو خط D و D´ در یک صفحه داده شده‌اند روی خط D´ نقطه‌ای بیابید که از خط D به فاصلهٔ معلوم ℓ باشد.



شکل ۸

حل. دو خط D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصلهٔ معلوم ℓ قرار دارد، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو خط با خط D´ جواب مسئله است.